Análisis Funcional

Examen XI

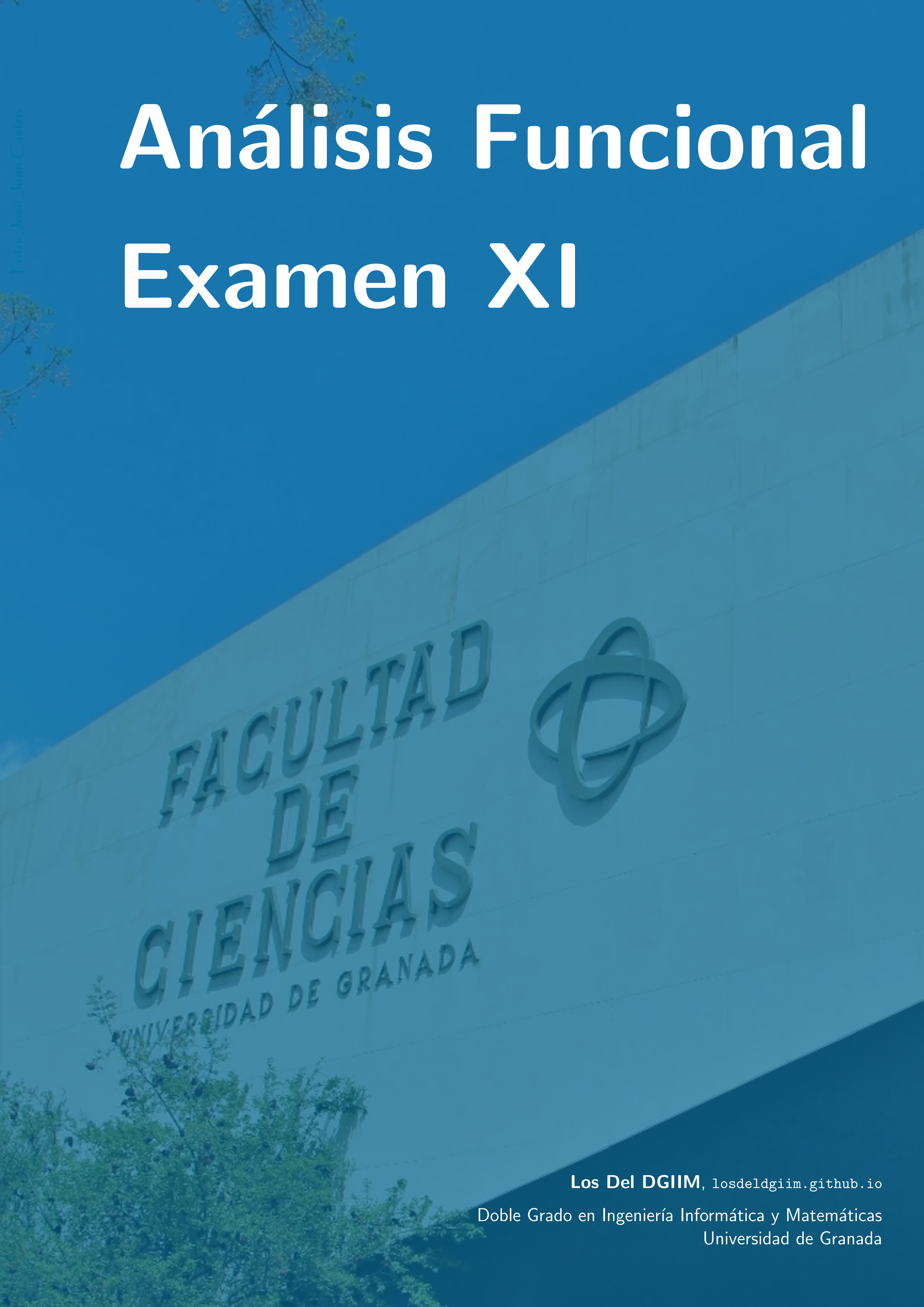

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen XI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2025/26.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Fecha En el mes de Noviembre.

Ejercicio 1. En el espacio de Banach $C[0,1]$ se considera el subespacio

$$X = \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\}$$

en el que se define el funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$ dado por

$$\varphi(f) = \int_0^1 t^8 f(t)\, dt \qquad \forall f \in X$$

(a) Probar que X es completo.

(b) Probar que φ es continuo y calcular su norma.

(c) ¿Alcanza φ su norma?

Ejercicio 2. En el espacio $C[0,1]$ se define

$$F(x) = \int_0^1 t^{15} x(t^{21})\, dt$$

para cada $x \in C[0,1]$. Prueba que F es un funcional lineal y continuo y calcula su norma. ¿La alcanza?

Ejercicio 3. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifique o proporciona una prueba; cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

1. Un espacio normado tiene dimensión finita si y sólo si todos sus subespacios vectoriales son cerrados.
2. Si X e Y son espacios de Banach y la dimension de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y es continuo.
3. Sea X un espacio de Banach. X es separable si y sólo si todos sus subespacios cerrados son separables.
4. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales no es abierto ni es cerrado en $C[0,1]$.
5. El interior de un subconjunto compacto de un espacio de Banach es vacío.
6. El subespacio

   $$X = \{f \in C[-1,1] : f(t) = f(-t) \quad \forall t \in [0,1]\}$$

   considerado como subespacio del espacio $C[-1,1]$ con la norma del supremo es denso en $C[-1,1]$.
7. En un espacio normado no completo, el único funcional lineal y continuo que alcanza su norma es el cero.
8. Dos hiperplanos cualesquiera de un espacio normado son isométricamente isomorfos.

9. Sea X un espacio de Banach. Si todo hiperplano cerrado de X es proximinal, entonces X tiene dimensión finita.

10. En el espacio vectorial Z de los polinomios reales de grado menor o igual que $N \in \mathbb{N}$, consideramos la norma

$$\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall p \in Z$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una constante $M_k > 0$ tal que

$$|p(k)| \leqslant M_k \|p\| \qquad \forall p \in Z$$

¿puede haber una constante M que valga para todo $k \in \mathbb{N}$?